



ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA FUNCIÓN POLINOMIAL

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1



CONTENIDO

1. Definición de función polinomial.
2. Teorema fundamental del álgebra.
3. Esbozo de la gráfica de una función polinomial en relación a sus raíces reales.
4. Teorema de Cardano-Viette.
5. Teoremas de paridad de raíces.
6. Teorema de bolzano.
7. Teorema de la regla de signos de descartes.
8. Teorema de gauss(raíces racionales).

Función Polinomial

Definición: Función Polinomial

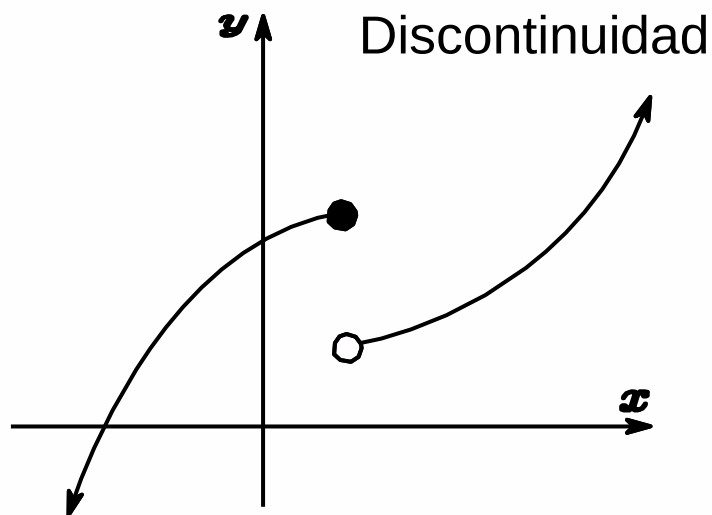
Una función $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es una función polinomial de grado “n” cuando su regla de correspondencia es de la forma:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

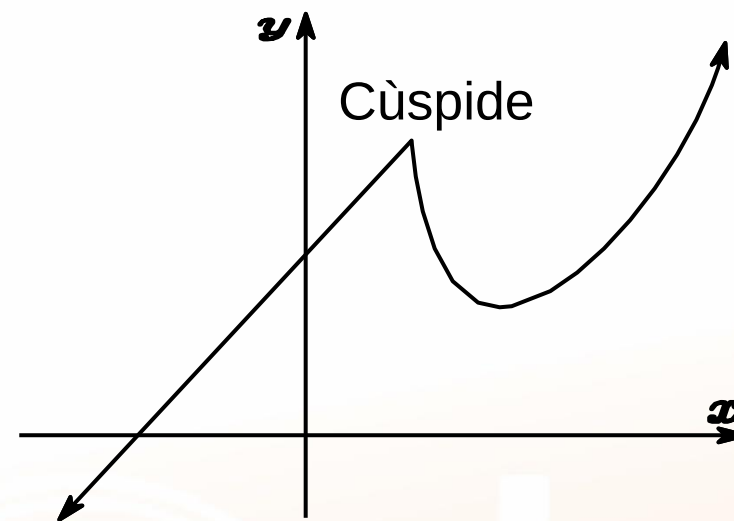
donde $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son números reales y $a_n \neq 0$

Gráfica de una función polinomial

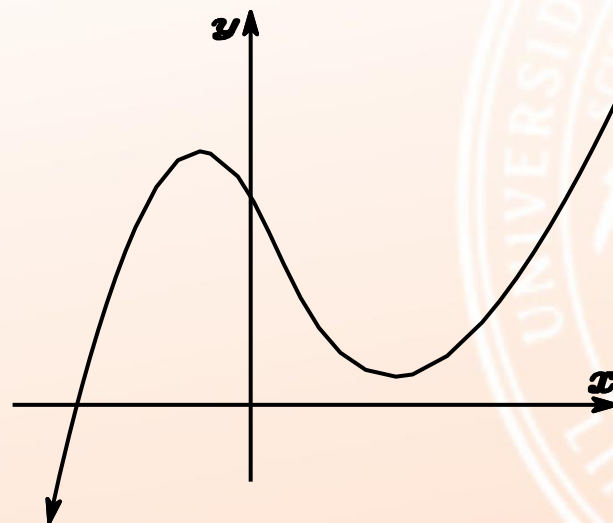
La gráfica de una función polinomial sobre el plano es una curva **suave** y **continua**, por **suave** queremos decir que la curva no tiene esquinas ni puntas (cúspides), **continua** significa que la curva no tiene cortes ni saltos y que puede ser dibujada sin interrupciones.



No es gráfica de una función polinomial.



No es gráfica de una función polinomial.



Si es gráfica de una
función polinomial.

Teorema Fundamental del álgebra

Toda función polinomial p de grado $n \in \mathbb{N}$, tiene al menos un valor complejo $c \in \mathbb{C}$ tal que $p(c)=0$

Corolario1

Toda función polinomial p de grado $n \in \mathbb{N}$, tiene al menos un valor complejo $c \in \mathbb{C}$ tal que $p(x)=(x-c)q(x)$ con $q(x)$ polinomio

Ejemplo

para $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 10$ tenemos $p(x) = \left(x - \frac{5}{3}\right)q(x)$

para $p(x) = x^4 - 1$ tenemos $p(x) = (x - i)q(x)$

Corolario2

Toda función polinomial p de grado $n \in \mathbb{N}$, se puede escribir:

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n)$$

Donde $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ son las raíces del Polinomio.

- Todo polinomio de grado “ n ” tiene “ n ” raíces
- Las raíces pueden ser racionales, reales, complejas no reales

Definición: “ α ” es una raíz de multiplicidad “ k ” si se cumple que:

$$p(x) = (x - \alpha)^K q(x) \text{ con } q(\alpha) \neq 0, q(x) \text{ polinomio}, k \geq 2.$$

También podemos decir que si exactamente “ k ” raíces toman un mismo valor “ α ” entonces “ α ” es una raíz de multiplicidad “ k ”.

Ejemplo Dada la función Polinomial $p(x) = (x - \sqrt{5})(x - 7)(x - 7)$
 $p(x) = (x - \sqrt{5})(x - 7)^2$

Hay 1 raíz de valor $\sqrt{5}$

Hay 1 raíz $\sqrt{5}$ simple o no múltiple

Hay 2 raíces de valor 7

Hay 1 raíz 7 de multiplicidad 2

Definición

Una ecuación polinomial de grado “n” tiene la forma
 $P(x)=0$
donde $P(x)$ es una función polinomial de grado “n”.

Ejemplo Son ecuaciones polinomiales $x^3 - 3x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x^5 - 8x^3 + 6x + 2 = 0$$

$$12x^2 + 6\sqrt{3}x + 21 = 0$$

Ejemplo Dada la ecuación Polinomial

$$2(x - 4)(x - 6)(x - 6)(x - 8)(x - 8)(x - 8) = 0$$



Hay 1 raíz de valor 4

Hay 2 raíces de valor 6

Hay 3 raíces de valor 8

Hay en total 6 raíces

Hay 3 soluciones CS={4;6;8}

Hay 1 raíz 4 simple o no múltiple

Hay 1 raíz 6 de multiplicidad 2

Hay 1 raíz 8 de multiplicidad 3

Hay en total 6 raíces

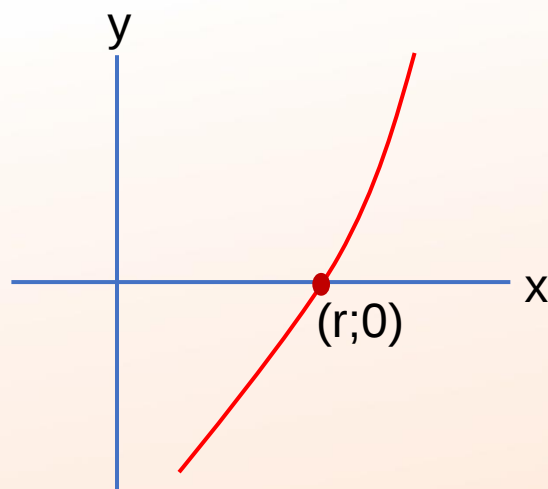
Hay 3 soluciones CS={4;6;8}

$$2(x - 4)(x - 6)^2(x - 8)^3 = 0$$

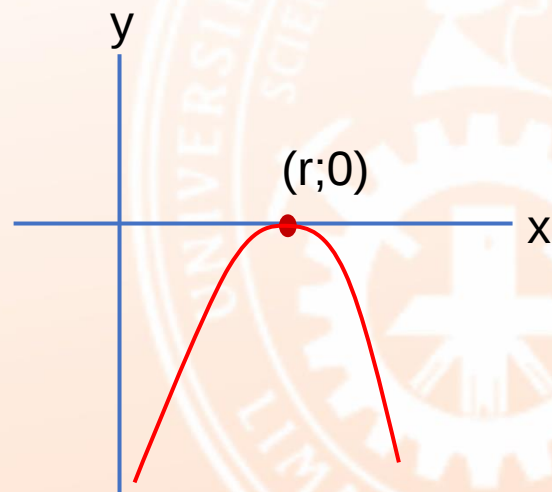
Esbozo de la Gráfica de una función polinomial en función a sus raíces

Reales

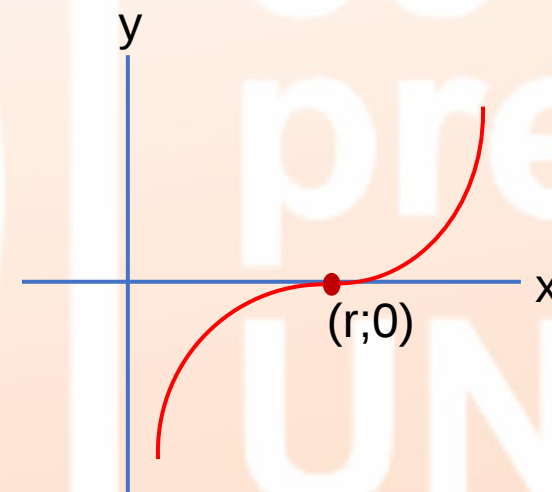
Si “ r ” es una raíz simple, la gráfica (localmente) cruza al eje X en el punto $(r, 0)$.



Si “ r ” es una raíz de multiplicidad par, la gráfica (localmente) se acerca tangencialmente al punto $(r, 0)$, rebotando en el eje X.



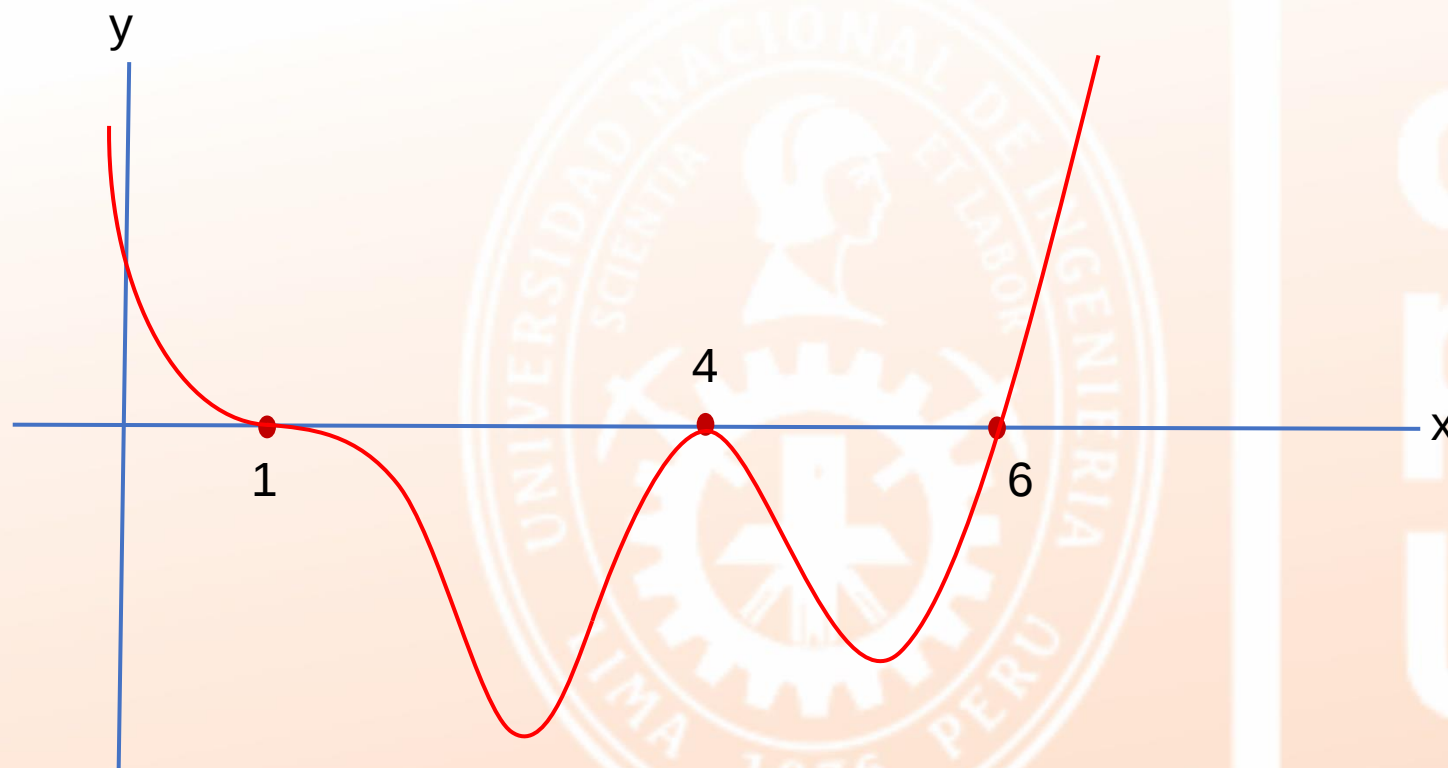
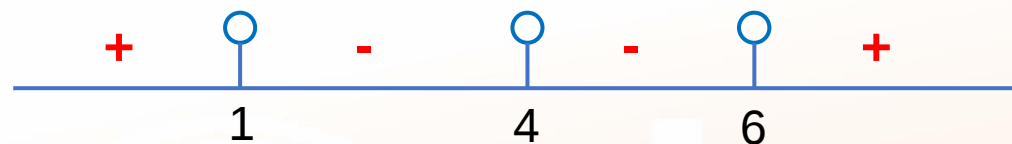
Si “ r ” es una raíz de multiplicidad impar, la gráfica (localmente) se acerca tangencialmente al punto $(r, 0)$, cruzando el eje X.



Ejemplo

Grafiquemos la Polinomial $p(x) = 2(x-1)^3(x-4)^2(x-6)$

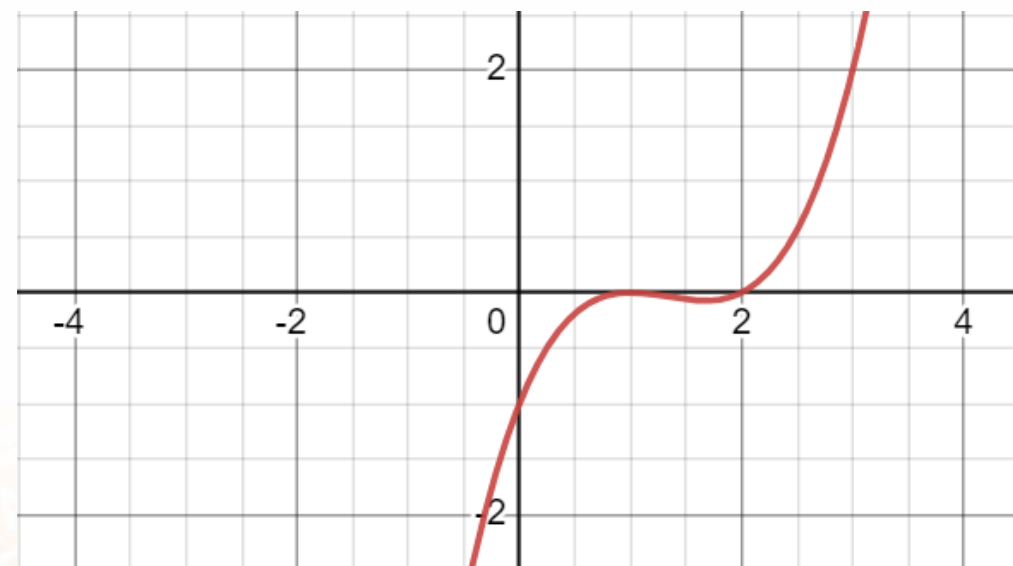
Analicemos los signos de $p(x)$



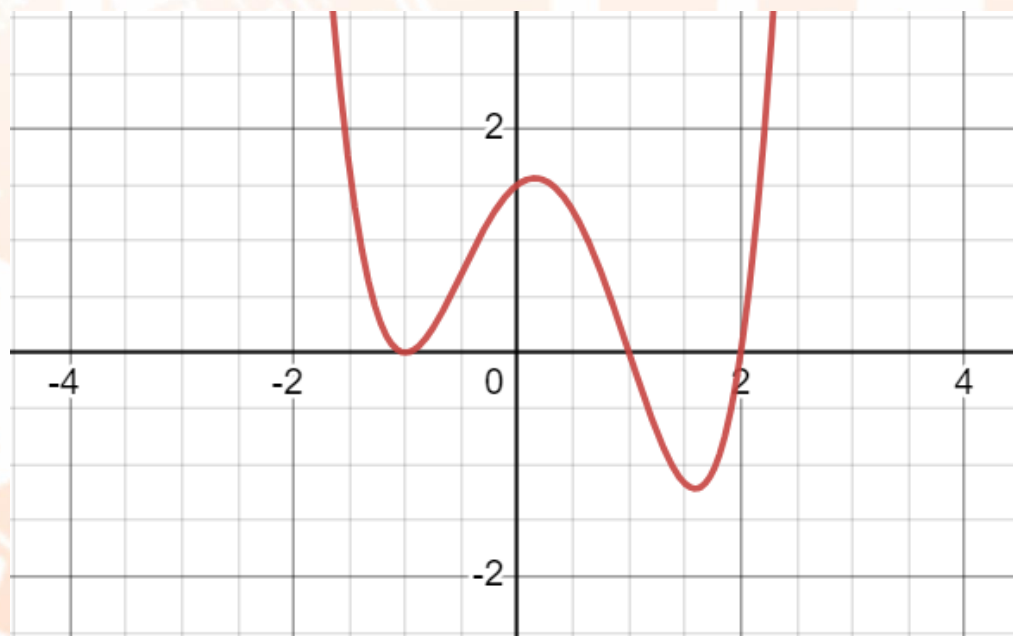
Casos posibles

1) Coeficiente Principal Positivo

Grado IMPAR $P(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2(x-2)$



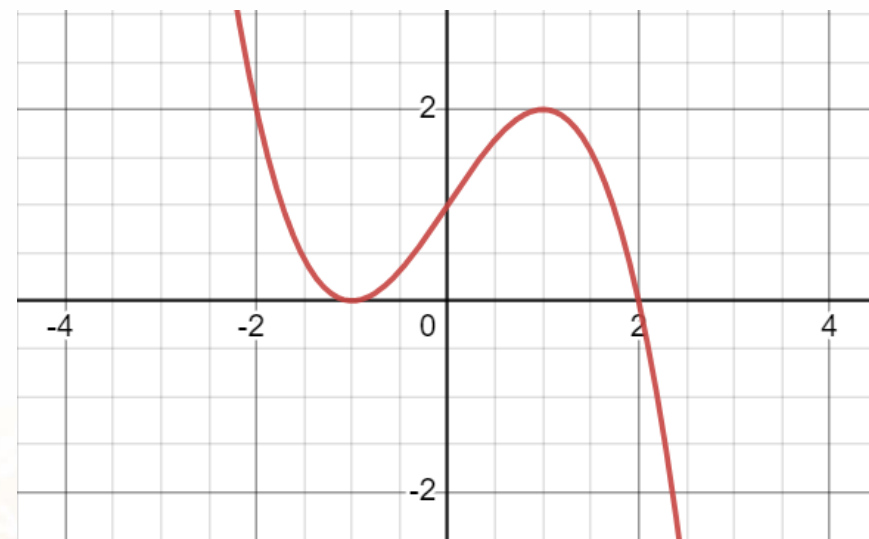
Grado PAR $P(x) = \frac{3}{4}(x+1)^2(x-1)(x-2)$



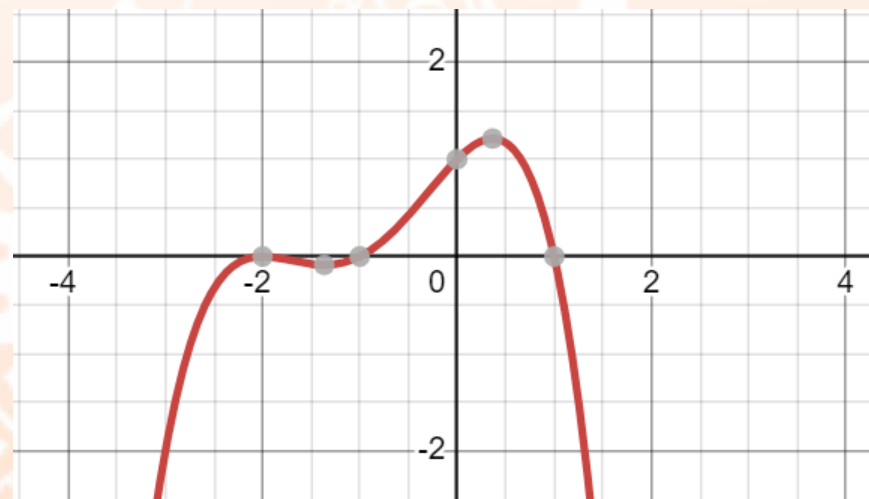
Casos posibles

2) Coeficiente Principal Negativo

Grado IMPAR $P(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2(x-2)$



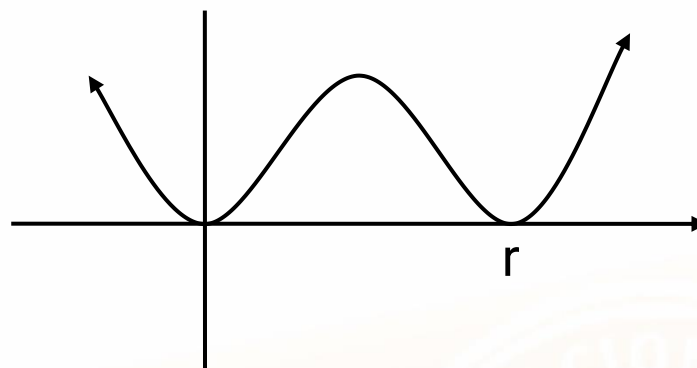
Grado PAR $P(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2(x+1)(x-1)$



Prob 287

Si la función polinomial de coeficientes reales $P(x) = 3x^4 - bx^3 + bx^2 + ax + c$

tiene por gráfica.



Halle $a+b+c+r$

Teorema de Cardano- Viette

Sea $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$; una función polinomial de grado $n \in \mathbb{N} (a_n \neq 0)$. Si $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ son las raíces de $P(x)$ (contando sus multiplicidades), entonces:

- Caso $n = 2$, $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$$1) r_1 + r_2 = -\frac{a_1}{a_2}$$

$$2) r_1r_2 = \frac{a_0}{a_2}$$

- Caso $n = 3$, $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

$$1) r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

$$2) r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3 = \frac{a_1}{a_3}$$

$$3) r_1r_2r_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$; una función polinomial de grado $n \in \mathbb{N}$. Si $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ son las raíces de $P(x)$ (contando sus multiplicidades), entonces:

- **Caso general**

$$1) r_1 + r_2 + \dots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad a_n \neq 0$$

$$2) r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$3) r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots + r_{n-3} r_{n-1} r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$n) r_1 r_2 r_3 \dots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Prob 288

Dado el polinomio $P(x) = 3x^3 - 6x + 5$ de raíces $m; n; p$

Halle el valor de $\frac{m^4 + n^4 + p^4}{m^3 + n^3 + p^3}$



PARIDAD DE RAICES

Teorema : Sea $P(x)$ una polinomial con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Si $P(x)$ tiene una raíz imaginaria de la forma $a + bi$ ($a; b \in \mathbb{R}$) entonces $a - bi$ es raíz de $P(x)$, ambas con la misma multiplicidad.

Corolario: Toda función polinomial de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real.

Teorema: Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

Si $P(x)$ tiene una raíz irracional de la forma $a \pm \sqrt{b}$, con $a; b \in \mathbb{Q}$ y $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$ entonces $a \mp \sqrt{b}$ es raíz de $P(x)$ ambas con la misma multiplicidad.

Teorema: Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$. En $P(x)$ las siguientes raíces irracionales $\sqrt{a} + \sqrt{b}; \sqrt{a} - \sqrt{b}; -\sqrt{a} + \sqrt{b}; -\sqrt{a} - \sqrt{b}$, con $a; b \in \mathbb{Q}$ y $\sqrt{a}, \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$ se presentan juntas con la misma multiplicidad.

Ejemplo: Sea el polinomio $P(x) = x^3 - 8x^2 + ax - b$; $\{a; b\} \subset \mathbb{R}$.

Si $2 + 3i$ es raíz de P , determine el valor de $a+b$.

Solución: Si $2 + 3i$ es raíz entonces por teorema, $2 - 3i$ también es raíz de P , la suma y producto de estas raíces son $S = 6$, $P = 10$, entonces $x^2 - Sx + P = x^2 - 4x + 13$ es factor o divisor de $P(x)$, mediante Horner

1	1	-8	a	-b
4		4	-13	
-13			-16	52
	1	-4	a-29	-b+52

$\left\{ \begin{array}{l} a = 29 \\ b = 52 \end{array} \right.$

$$P(x) = (x - 4)(x^2 - 4x + 13)$$

Ejercicio: Determine el polinomio mónico de grado mínimo P , con coeficientes enteros que tiene como raíces a $3 + \sqrt{7}$ y $4 - 5i$

Solución:

Si $3 + \sqrt{7}$ es raíz de P entonces $3 - \sqrt{7}$ también es raíz de P
con la suma y el producto $S = 6$, $P = 2$ obtenemos el factor $(x^2 - 6x + 2)$

Asimismo $4 + 5i$ es raíz de P entonces $4 - 5i$ también es raíz de P
con la suma y el producto $S = 8$, $P = 41$ obtenemos el factor $(x^2 - 8x + 41)$

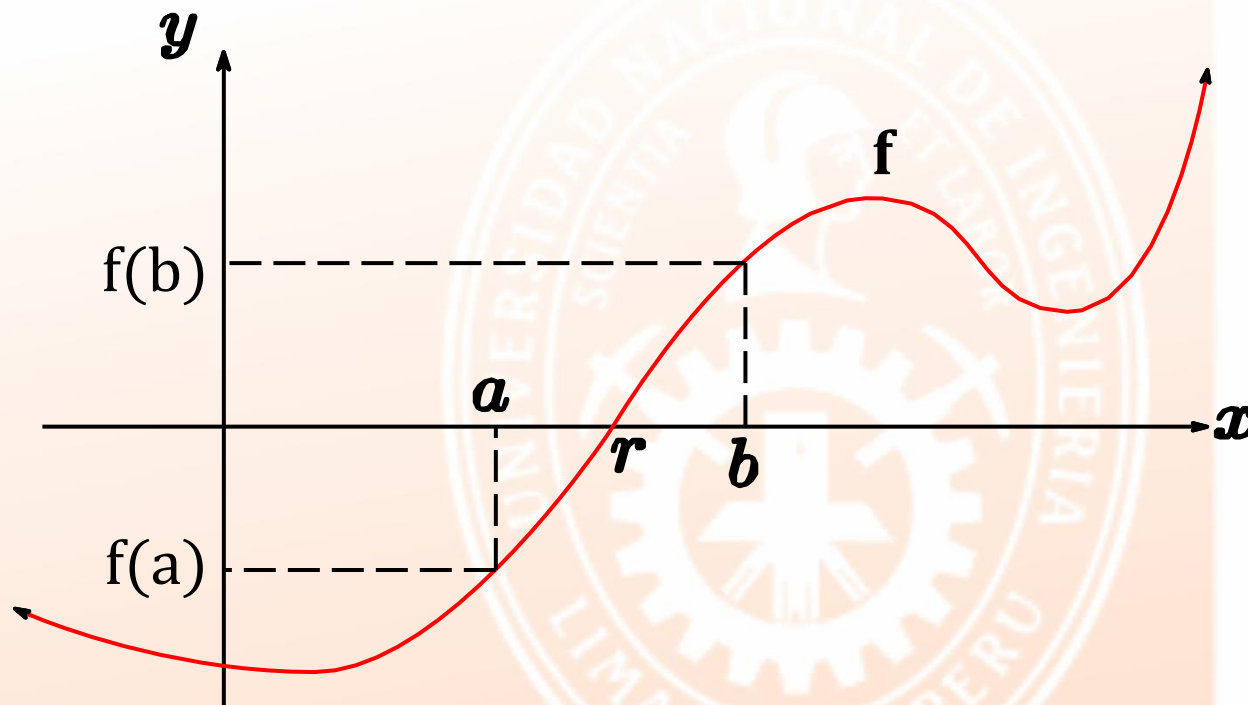
Entonces el polinomio de grado mínimo es

$$P(x) = (x^2 - 6x + 2)(x^2 - 8x + 41) = x^4 - 14x^3 + 91x^2 - 262x + 82$$

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en $[a; b]$, tal que $f(a)f(b) < 0$, entonces existe al menos un número real $r \in \langle a, b \rangle$, tal que $f(r) = 0$.

Esto se interpreta gráficamente así:



Teorema de Bolzano (Caso de funciones polinómicas)

Si P es una función polinomial tal que $P(a)P(b) < 0$, entonces existe al menos un número real $r \in \langle a, b \rangle$, tal que $P(r) = 0$

Ejemplo

Si $P(x) = 3x^5 + 8x^3 - 3$, verifique que existe $r \in \langle 0, 1 \rangle$ tal que $P(r) = 0$.

Resolución:

Vemos que $P(0) = -3$ y $P(1) = 8$, de esto tenemos que $P(0)P(1) < 0$, entonces por el teorema de Bolzano, existe $r \in \langle 0, 1 \rangle$ tal que $P(r) = 0$

Las otras 4 raíces serán imaginarias

Prob 294

Determine el intervalo en el cual se encuentra la única raíz real de $P(x) = x^3 + x - 3$

$$\left\langle -\frac{3}{4} ; -\frac{1}{2} \right\rangle \quad \langle 0 ; 1 \rangle \quad \left\langle 1 ; \frac{5}{4} \right\rangle \quad \left\langle \frac{5}{4} ; \frac{3}{2} \right\rangle \quad \langle 2 ; +\infty \rangle$$



Regla de signos de Descartes

El número de raíces reales positivas de un polinomio ordenado $P(x)$ sobre $\mathbb{R}$, es igual al número de variaciones de signo de sus coeficientes, o menor en un número entero par.

Corolario:

El número de raíces reales negativas de un polinomio ordenado $P(x)$ sobre $\mathbb{R}$ es igual al número de variaciones de signo de los coeficientes de $P(-x)$, o menor en un número entero par.

Ejemplo

Analizar por el Teorema de Descartes, las raíces positivas o negativas que pueda tener el polinomio

$$P(x) = x^4 + 2x + x^3 + 8 - 12x^2$$

Ordenando el polinomio

$$P(x) = x^4 + x^3 - 12x^2 + 2x + 8$$

$$P(x) = x^4 + x^3 - 12x^2 + 2x + 8$$

Se observa dos variaciones,
entonces hay dos raíces
positivas o ninguna,

$$P(-x) = x^4 - x^3 - 12x^2 - 2x + 8$$

Hay dos variaciones,
entonces hay dos raíces
negativas o ninguna.

Se puede verificar que estamos en lo cierto pues

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 + 3x - 4)(x^2 - 2x - 2) \\ &= (x - 1)(x + 4)(x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Siendo las raíces $x_1 = 1$ $x_2 = -4$ $x_3 = -1 + \sqrt{3}$ $x_4 = -1 - \sqrt{3}$

Prob 297

Dados $a; b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y además el siguiente polinomio

$$P(x) = ax^4 + 2x^2 - bx + 2 \quad \text{tiene}$$

únicamente 2 raíces reales: x_1, x_2 .

Señale el valor de verdad en cada caso

I. $a > 0 \rightarrow x_1 x_2 > 0$

II. $a < 0 \rightarrow x_1 x_2 < 0$

III. $ab > 0 \rightarrow$ al menos una raíz real es positiva

A) VVV

B) VVF

C) VFV

D) VFF

E) FFF



Teorema de las Raíces racionales

Dado $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \quad a_0, a_n \neq 0$$

Sea $\alpha = \frac{r}{s}$ una fracción irreducible. Si α es una raíz de $p(x)$, entonces $r|a_0 \wedge s|a_n$. ($r, s \in \mathbb{Z}$).

Corolario (Raíces enteras)

Dado $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$;

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 \quad (\text{mónico})$$

Si $\alpha \in \mathbb{Z}$ es raíz de $p(x)$ entonces α es divisor de a_0 .

Ejemplo

Halle las raíces racionales de $P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 9x + 2$

Resolución:

Las posibles raíces racionales son los números racionales cuyo numerador son los divisores del término independiente y cuyo denominador son los divisores del coeficiente principal.

$$\text{Posibles raíces rac.} = \pm \frac{\left\{ \begin{array}{c} \text{Divisores del término} \\ \text{independiente} \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{c} \text{Divisores del} \\ \text{coeficiente principal} \end{array} \right\}} = \pm \frac{\{1; 2\}}{\{1; 2; 4\}} = \pm \left\{ 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; 2; \frac{1}{2} \right\}$$

-2	4	3	-9	2
	↓	-8	10	-2
	4	-5	1	0
1	↓	+4	-1	
	4	-1	0	

Luego utilizando Ruffini, verificamos que $-2; 1$ y $1/4$ son raíces de P .

Prob 291

Luego de determinar a un polinomio de coeficientes enteros, mónico y de menor grado posible, que tenga por raíz a $\sqrt[3]{2} + i$.

Halle la suma de sus coeficientes.



Prob 292

Dada la ecuación polinomial $x^3 + px + q = 0$ de raíces: α ; β ; θ . Halle una nueva ecuación polinomial de grado

3 cuyas raíces $2 - \frac{3}{\alpha}$; $2 - \frac{3}{\beta}$; $2 - \frac{3}{\theta}$ sean

A) $8 + 2p(3 - x)^2 + q(3 - x)^3 = 0$

B) $1 + p(2 - x)^2 + q(2 - x)^3 = 0$

C) $27 + 3p(2 - x)^2 + q(2 - x)^3 = 0$

D) $1 + p(3 - x)^2 + q(3 - x)^3 = 0$

E) $8 + 3p(2 - x)^2 + 2q(2 - x)^3 = 0$